



TITLE:

シア流を含む非一様プラズマ中の MHD波動と安定性 (オイラー方程式 の数理 : 渦運動と音波150年)

AUTHOR(S):

古川, 勝

CITATION:

古川, 勝. シア流を含む非一様プラズマ中のMHD波動と安定性 (オイラー方程式の数理 : 渦運動と音波150年). 数理解析研究所講究録 2010, 1697: 195-207

ISSUE DATE:

2010-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/141661>

RIGHT:

シア流を含む非一様プラズマ中の MHD 波動と安定性

東京大学 大学院新領域創成科学研究科 古川勝 (Masaru Furukawa)

Grad. Sch. Frontier Sci., Univ. Tokyo

1. はじめに

本研究では、流れをもつ磁化プラズマにおける磁気流体波 (Alfvén 波) の線形安定性問題を扱っている。単に線形波動の安定性ならば分散関係を書き下せば終わり、というわけではない。流れがない場合でも、プラズマの空間的非一様性により、波は多様な構造を持ち得る。また、共鳴現象が解析を複雑にする。本研究で具体的に研究対象とするのは、磁場閉じ込め核融合プラズマ、特にトカマク型と呼ばれる装置で生成される軸対称トーラス形状のプラズマの安定性である。非一様なプラズマであり、実際に多様な構造が生み出される。このようなプラズマが、流れ、特にシア流をもつときに、Alfvén 波の安定性がどのようにになっているのかを知ることは、核融合開発研究として重要な意義をもつ。一方で、数理科学的な観点からも興味深い研究対象となっており、その研究に用いられる方法や、定性的結論については、他研究分野においても有意義なものであると考えている。なお、以下に記述するのは、教科書にも載っていることも含め基礎的な事項の整理と、ここ数年で筆者が共同研究者と共に行い、論文誌に掲載された研究成果の要約である。

まず、非一様プラズマにおける波の解析がそれほど単純ではないことの一例として、1 次元スラブプラズマにおける Alfvén 波について観察してみる。平衡状態で磁場が $\mathbf{B} = B_y(x)\hat{y} + B_z(x)\hat{z}$ とする。波数ベクトルを $\mathbf{k} = k_y\hat{y}$ とし、摂動速度場と摂動磁場をそれぞれ $\tilde{\mathbf{v}} = \nabla[\phi(x, t)e^{ik_y y}] \times \hat{z} + \tilde{v}_z(x, t)e^{ik_y y}\hat{z}$, $\tilde{\mathbf{B}} = \nabla[\psi(x, t)e^{ik_y y}] \times \hat{z} + \tilde{B}_z(x, t)e^{ik_y y}\hat{z}$ とすると、Alfvén 波は渦度方程式と誘導方程式で記述できる：

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\phi = \frac{ik_y}{\rho}[B_y\Delta\psi - B_y''\psi], \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = ik_y B_y \phi. \quad (2)$$

ここで、 $\Delta := \partial^2/\partial x^2 - k_y^2$ である。摂動量の時間依存性を $e^{-i\omega t}$ と仮定して、さらにこれらをまとめると、

$$\frac{d}{dx}\left[D(\omega, k_y; x)\frac{d\phi}{dx}\right] - k_y^2 D(\omega, k_y; x)\phi = 0 \quad (3)$$

を得る。ここで、 $D(\omega, k_y; x) := \omega^2 - \omega_A^2$, $\omega_A^2 := (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2/\rho$ である。 ρ は平衡質量密度である。平衡が x 方向にも一様だとすると、 x 方向にも平面波を仮定して d/dx を ik_x と書き換え、分散関係式 $D = 0$ つまり $\omega^2 = \omega_A^2$ を得る。平衡が x 方向に非一様のとき、 ω_A^2 は

x の関数となる。したがって、 $D = 0$ となる ω^2 は、考えている空間内で取り得る ω_A^2 の値の範囲で連続値をとる。ある $x = x_s$ で $D = 0$ となるとしよう。 $D = 0$ のとき、方程式 (3) の最高階微分項の係数がゼロになるので、これは特異点である。特に、 ω_A が $x = x_s$ の近傍で $\omega_A \simeq \omega_A(x_s) + \omega'_A(x_s)(x - x_s)$ と表され、 $\omega^2 = \omega_A(x_s)^2$ のとき、この点は確定特異点となり、その近傍で Frobenius 級数解を構成できる：

$$\phi = c_1 \phi_1(x) + c_2 [\phi_1(x) \ln |x - x_s| + \phi_2(x)]. \quad (4)$$

ここで ϕ_1, ϕ_2 は $x = x_s$ の周りで解析的であり、 $\phi_1(x_s) \neq 0$ である。それぞれの x_s に対応して $D = 0$ を与える ω^2 の連続値を連続スペクトルと呼ぶ。実際には、この解のエネルギーは発散するので、定在波として存在するわけではないことに注意を要する。系の中に $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$ となる場所があると、連続スペクトルは $\omega^2 = 0$ まで伸びている。密度勾配と重力があると、この連続スペクトルの端から $\omega^2 < 0$ 側に点スペクトルがしみ出る場合がある。これは交換型 (Rayleigh-Taylor) 不安定性である。他にも、様々な要因によってこのような不安定性が生じ得る。

磁場閉じ込め核融合プラズマの研究分野におけるプラズマの力学的平衡とその安定性問題は、研究が始まった頃からの最重要課題の 1 つであり、磁気流体力学 (MHD) 方程式を用いて精力的に研究されてきた [1]。プラズマが MHD 的に不安定な状態になると、閉じ込め性能の劣化あるいは放電崩壊につながるとされ、例えば閉じ込め可能なプラズマ圧力に上限が加わるような形で装置の運転パラメータ領域が制限されている [2, 3]。当然ながら、核融合開発という意味では、高温プラズマを高密度で長時間閉じ込める必要があるため、MHD 不安定性による運転パラメータ領域の制限は好ましくないものである。近年のトカマクプラズマ実験では、外部からのプラズマ加熱に伴って対称軸周りに回転する運動量も注入される等の理由により、プラズマが流れをもっている (回転している) 場合がほとんどである。このプラズマ回転が、MHD 平衡や安定性に有意に影響し、運転パラメータ領域の拡張あるいは制限の撤廃にまでつながる可能性があるため、近年の最重要研究課題の 1 つとなっている。

軸対称トーラスプラズマの力学的平衡については、対称軸を回る方向のプラズマ回転があっても、Grad-Shafranov 方程式 [4-7] と呼ばれる 2 次元の楕円型 2 階偏微分方程式を解けば得られることがわかっている。以下の節では、安定性問題について述べていくことにする。2 節では、支配方程式を導入する。3 節では、流れをもつプラズマにおける線形波動を扱うための方法として、Kelvin の方法を紹介する。4 節で、実際にトカマクプラズマを研究した結果について紹介し、5 節でまとめる。

2. 線形化理想 MHD 方程式

MHD 方程式で記述される不安定性のうち、粘性や電気抵抗のような散逸効果が本質的役割を担わないものを理想 MHD 不安定性と呼ぶ。当研究で対象としているのは、この理想 MHD 不安定性である。平衡プラズマ流がある場合を扱う前に、よく知られた流れなしの場合について概観しておきたい。平衡プラズマ流がない場合には、プラズマ流体要素の変位ベクトル ξ を、摂動流速 \mathbf{v}_1 を用いて $\mathbf{v}_1 := \partial \xi / \partial t$ と定義し、線形化された理想 MHD 方程式に用いると [1, 8],

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathcal{F}_s \xi, \quad (5)$$

$$\mathcal{F}_s \xi := [(\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}_1] + \nabla(\gamma p \nabla \cdot \xi + \xi \cdot \nabla p) \quad (6)$$

という 1 本の方程式にまとめることができる。ただし、 $\mathbf{B}_1 := \nabla \times (\xi \times \mathbf{B})$ は磁場の摂動量であり、 ρ, \mathbf{B}, p はそれぞれ平衡質量密度、平衡磁場、平衡圧力、また γ は比熱比である。(5), (6) 式は、典型的な長さ L 、磁場強度 B_0 、密度 ρ_0 、圧力 $p_0 := B_0^2 / \mu_0$ 、速度 $v_A := B_0 / \sqrt{\mu_0 \rho_0}$ 、時間 $\tau_A := L / v_A$ で規格化されたものである。 μ_0 は真空透磁率である。 \mathcal{F}_s は空間に関する 2 階偏微分作用素であり、物理的に適切な境界条件の下でエルミート作用素である [1, 8]。したがって、点スペクトルと連続スペクトルによるスペクトル分解が可能であることが知られている。また、異なるスペクトルに属する（一般化）固有関数は直交する。したがって、(5) 式はそれぞれの固有モードに分解でき、固有値問題

$$-\rho \omega^2 \xi = \mathcal{F}_s \xi \quad (7)$$

を解いて $\omega^2 < 0$ の固有値が見つければ、その平衡は不安定ということになる。トカマクプラズマの線形安定性は、基本的には (7) 式を解いて調べられている [9]。実際には、先に述べたように、 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$ となる場所（有理面）は臨界安定状態 $\omega^2 = 0$ のときに特異点となり、精密な理論 [10] が必要となるが、精度良く理想 MHD 安定性を数値計算できる理論が構築されている [11, 12]。

流れをもつプラズマの場合にも、線形化 MHD 方程式は、プラズマを構成する流体要素の Lagrange 的変位ベクトル ξ に対する 1 本の偏微分方程式にまとめることができる [13]：

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + 2\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \frac{\partial \xi}{\partial t} = \mathcal{F}_f \xi, \quad (8)$$

$$\mathcal{F}_f \xi := \mathcal{F}_s \xi + \nabla \cdot (\rho \xi \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \nabla \xi). \quad (9)$$

ここで $\mathbf{v}_1 := \partial \xi / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla \xi - \xi \cdot \nabla \mathbf{v}$ であり、 \mathcal{F}_f は適切な境界条件の下でエルミート作用素であるが、 $2\rho \mathbf{v} \cdot \nabla$ は反エルミート作用素である。非エルミート演算子のスペクトル

分解可能性は保証されていないので、流れをもたないプラズマの場合のようにスペクトル解析を行うことで MHD 安定性が全てわかるとは言えない。一般的には、初期値問題を解いて時間発展を観察することになる。

3. シア流により引き伸ばされる "モード": Kelvin の方法

この節では、シアをもつ流れの中の波を扱うための方法として、Kelvin の方法を紹介する [14]。流れをもつプラズマにおける線形波動を記述する方程式を、模式的に

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u = \mathcal{A}u \quad (10)$$

と書く。ここで、摂動量を抽象的に u と表現し、 \mathbf{v} は平衡プラズマ流、 \mathcal{A} は時間に依存しないエルミート作用素である。 $\mathbf{v} \cdot \nabla$ の部分が反エルミート作用素である。ここで、もし

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\varphi} = 0 \quad (11)$$

かつ

$$\mathcal{A}\tilde{\varphi} = \lambda_k(t)\tilde{\varphi} \quad (12)$$

を満たす $\tilde{\varphi}(t; \mathbf{k}, \mathbf{x})$ が存在すれば、

$$u = \int d\mathbf{k} \hat{u}_k(t) \tilde{\varphi}(t; \mathbf{k}, \mathbf{x}) \quad (13)$$

と分解し、展開係数 $\hat{u}_k(t)$ の発展方程式を

$$\frac{d}{dt} \hat{u}_k(t) = \lambda_k(t) \hat{u}_k(t) \quad (14)$$

と得ることができる。これは、対流微分 $\partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ の部分を特性曲線法で、エルミート演算子 \mathcal{A} の部分をスペクトル分解で解いていることに対応する。シア流によって引き伸ばされる "モード" を巧みに選び、その振幅の時間発展を記述する方程式を得ている。これは Kelvin の方法と呼ばれている [14]。1次元スラブプラズマにおいて、重力と密度勾配の関係によって引き起こされる交換型不安定性 [15] や、電流駆動型のキンク不安定性のモデル [16] に適用され、過渡現象や漸近挙動などの興味深い現象が見いだされている。

4. トカマクプラズマにおけるバルーニング不安定性とエネルギー移送による安定化

この節では、いよいよトカマクプラズマの配位で考えていく。最初に、少し用語を説明しておく。トカマクをはじめとする軸対称トーラスプラズマの力学的平衡は、Grad-Shafranov 方程式 [4-7] と呼ばれる 2次元の楕円型 2階偏微分方程式を解けば得られる。平

衡で、磁力線は入れ子状の磁気面を形成する。軸対称トーラスの2つの周期性のうち、対称軸を回る方向をトロイダル方向、もう1つの周期性の方向をポロイダル方向と呼ぶ。磁気面上では、磁場はトロイダル方向の成分とポロイダル方向の成分をもち、磁力線はらせん状となる。このらせん状の磁力線のねじれピッチの磁気面平均量を安全係数と呼ぶ。プラズマの安定性に密接に関連した量だから、このように呼ばれている。安全係数は、入れ子状になった磁気面毎に通常異なる値をもつ。その変化の割合を磁気シアと呼ぶ。圧力は、閉じ込められた領域の内側ほど通常高い。また、磁場曲率が実効的な重力として働くので、この圧力勾配と磁場曲率の内積が正のとき、交換型 (Rayleigh-Taylor 型) の不安定性が起こり得る。

このような磁場配位の中で、波の空間構造を表現する場合、トーラスの周期性を利用した Fourier 級数展開を用いるのが便利である。トロイダル方向には対称性があるので、Fourier モードは量子化されるが、ポロイダル方向にはないので、モード間結合が起こる。結果として、多数のポロイダル Fourier モードが結合し、トーラス外側の振幅が大きい空間構造をとる Rayleigh-Taylor 型の不安定性をバルーニング不安定性と呼ぶ。

流れがないトカマクプラズマにおけるバルーニング不安定性の解析手法は、1970 年代後半から 1980 年台前半に掛けて確立された [17-19]。プラズマ流を考慮した場合を考える前に、流れがない場合の理論をやや詳しくおさらいしておきたい。流れがない場合、プラズマの変位 ξ に対する方程式 (5) はエルミート演算子 \mathcal{F}_s で記述され、スペクトル分解可能である。したがって、変位 ξ の時間依存性を $\xi(\mathbf{x}, t) = \xi(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ と仮定し、固有値問題 (7) に帰着する。次に、空間のみの関数 $\xi(\mathbf{x})$ について、Fourier モード展開を試みる。磁力線を曲げない空間構造が最も不安定になりやすいと考えられるので、 $\xi(\mathbf{x}) = \xi(r, \theta)e^{in(\zeta - q(r)\theta)}$ と仮定してみる。ここで、 (r, θ, ζ) は磁気座標と呼ばれる一般曲線座標系で、それぞれプラズマ小半径 (磁気面をラベルする)、ポロイダル角、トロイダル角であり、 $q(r)$ は安全係数、 n はトロイダルモード数で $n \gg 1$ が仮定されている。圧力勾配駆動型不安定性については、磁力線を横切る波長が短いほど不安定になりやすいことが知られている [1]。この表現を使うと、 $e^{in(\zeta - q(r)\theta)}$ の部分が磁力線を横切る速い振動を表し、 $\xi(r, \theta)$ がゆっくり変化するエンベロープを表すので、 $n \gg 1$ を用いてスケール長の分離ができるだろう、という目論みである。しかし、これは単純には成功しない。 $q(r)$ が無理数を含む連続値をとるので、 $\xi(\mathbf{x})$ が θ に関して周期性を満たすためには、エンベロープ $\xi(r, \theta)$ が不連続になる場所、つまりゆっくり空間変化するはずのエンベロープが無限に速く空間変化する場所が現れ、スケール長分離が失敗する。これを解決するために、カバーリング空間が導入される。これは、無限空間 $-\infty < \vartheta < \infty$ において定義された、非周期関数 $\Xi(r, \vartheta)$

を用いて、周期関数 $\xi(r, \theta)$ を

$$\begin{aligned}\xi(r, \theta) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\theta} \int_{-\infty}^{\infty} d\vartheta e^{im\vartheta} \Xi(r, \vartheta) \\ &= 2\pi \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Xi(r, \theta - 2\pi j)\end{aligned}\quad (15)$$

のように再構成する考え方である。2行目への変形では Poisson の和公式を用いた。もちろん、 $\lim_{\vartheta \rightarrow \pm\infty} \Xi = 0$ であり、和が収束することが暗に仮定されている。これを用いると、線形化理想 MHD 方程式の固有値問題 (7) は $\mathcal{F}_s \Xi(r, \vartheta, \zeta) = -\rho\omega^2 \Xi(r, \vartheta, \zeta)$ へと変換される。 \mathcal{F}_s に現れる θ は全て ϑ に置き換わる。すると、 $\Xi(r, \vartheta)$ は ϑ に関して周期性を満たさなくてもよいので、先程のようなエンベロップの不連続性は現れず、スケール長分離を行うことができるというわけである。アイコナル S を導入して

$$\Xi(r, \vartheta, \zeta) = \hat{\xi}(r, \vartheta) e^{inS(r, \vartheta, \zeta)} \quad (16)$$

と表し、

$$\mathbf{B} \cdot \nabla S = 0, \quad (17)$$

つまり平衡磁場に沿って速い振動はないと仮定すると、

$$S = \zeta - q(r)\vartheta + S_0(r) \quad (18)$$

と選べる。波数ベクトルはアイコナルの空間微分で定義されるので、

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{k}} &:= \nabla S \\ &= \nabla \zeta - q \nabla \vartheta - (\vartheta - \theta_k) \nabla q,\end{aligned}\quad (19)$$

$$\theta_k := \frac{dS_0(q(r))}{dq} \quad (20)$$

である。 θ_k はバレーニング角と呼ばれ、要はプラズマ小半径方向の波数である。 $\hat{\xi} = \hat{\xi}_\perp \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}/B^2 + \hat{\xi}_\parallel \mathbf{B} + \hat{\xi}_k \hat{\mathbf{k}}/|\hat{\mathbf{k}}|^2$ とし、

$$\hat{\xi}_\perp = \hat{\xi}_\perp^{(0)} + \frac{1}{n} \hat{\xi}_\perp^{(1)} + \frac{1}{n^2} \hat{\xi}_\perp^{(2)} + \dots \quad (21)$$

($\hat{\xi}_\parallel$ と $\hat{\xi}_k$ も同様) と展開すると、以下の "バレーニング方程式" が得られる：

$$\begin{aligned}-\rho\omega^2 |\hat{\mathbf{k}}|^2 \hat{\xi}_\perp^{(0)} &= B^2 \mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{|\hat{\mathbf{k}}|^2}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla \hat{\xi}_\perp^{(0)} \right) + \frac{2}{B^2} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\kappa}) (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla p) \hat{\xi}_\perp^{(0)} \\ &\quad + \frac{2\gamma p}{B^2 + \gamma p} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\kappa}) \left[B^2 \mathbf{B} \cdot \nabla \hat{\xi}_\parallel^{(0)} - 2(\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\kappa}) \hat{\xi}_\perp^{(0)} \right],\end{aligned}\quad (22)$$

$$-\rho\omega^2 B^2 \hat{\xi}_\parallel^{(0)} = \mathbf{B} \cdot \nabla \left[\frac{\gamma p}{B^2 + \gamma p} \left\{ B^2 \mathbf{B} \cdot \nabla \hat{\xi}_\parallel^{(0)} - 2(\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\kappa}) \hat{\xi}_\perp^{(0)} \right\} \right]. \quad (23)$$

$\mathbf{B} \cdot \nabla$ は磁力線方向 (ϑ 方向) の微分作用素であり, 空間 1 次元の常微分方程式になっている. このようなスケール長分離を行う前は, 軸対称系では, トロイダル方向には摂動を量子化できたとしてもポロイダル方向にはモード間結合があるので, 本質的に空間 2 次元の固有値問題, つまり偏微分方程式であった. スケール長分離のおかげで, 空間 2 次元の問題が 1 次元に落とされたわけで, 偏微分方程式を直接解こうとする試みよりも, 大幅に簡単化されている.

一つ注意しなければならないのは, 方程式 (22), (23) を解いて求めた固有値 ω^2 , 固有関数 $\hat{\xi}_{\perp}^{(0)}$ と $\hat{\xi}_{\parallel}^{(0)}$ は, 厳密には元の空間 2 次元の固有値問題の解ではないことである. 実際, 小半径方向の波数 θ_k に関して, 量子化条件

$$n \oint dq \theta_k(q; \omega^2) = 2\pi \left(N + \frac{1}{2} \right) \quad (24)$$

(N は整数) を満たす必要がある. ただし積分記号は $q-\theta_k$ 空間で $\omega^2 = \text{const.}$ となる等高線に沿って積分することを意味する. これが空間 2 次元の固有モード $\hat{\xi}(r, \vartheta)$ が存在する条件であるが, このようにして求めた固有値 ω^2 は, 単に θ_k をパラメータとして解いた "1 次元的な" 最大固有値 ω^2 よりも大きく (不安定性が存在する場合は $\omega^2 < 0$ に注意. つまり成長率を小さくする側に働く) なり, そのずれも ω^2 に対して $1/n$ のオーダーであることが示されている [18, 20]. したがって, θ_k を単にパラメータとして (22), (23) 式を解く, いわゆる局所解析が最も厳しい安定条件を与えるので, 通常はこれによって安定性を判定している.

非圧縮性を仮定した場合も, やはり $\hat{\xi}_{\perp}^{(0)}$ と $\hat{\xi}_{\parallel}^{(0)}$ の連立方程式となるが, $\hat{\xi}_{\perp}^{(0)}$ による慣性だけ残すことにすると [18], さらに簡単化されて, 以下のモデル方程式が得られる:

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{|\hat{\mathbf{k}}|^2}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla \hat{\xi}_{\perp}^{(0)} \right) + \left[\frac{2}{B^4} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\kappa}) (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla p) + \frac{\rho |\hat{\mathbf{k}}|^2}{B^2} \omega^2 \right] \hat{\xi}_{\perp}^{(0)} = 0. \quad (25)$$

このモデル方程式を解いて得られる固有値 ω^2 は, 当然のことながら, 物理的な周波数の自乗とは異なっている. しかし, 臨界安定な状態を求める問題では, $\omega^2 = 0$ となるため, 物理的に正しい慣性を用いた場合と同じ結果が得られる. つまり, 臨界安定状態を同定するには十分である.

さて, トロイダル回転を考慮した場合に移ろう. この場合の取り扱い, 1980 年代後半から研究が進められてきた [21–25]. 摂動の時間依存性を $\propto e^{-i\omega t}$ と仮定することを放棄する. カバーリング空間での摂動 $\Xi(r, \vartheta, \zeta, t)$ を

$$\Xi(r, \vartheta, \zeta, t) = \hat{\xi}(r, \vartheta, t) \exp[i n S(r, \vartheta, \zeta, t)] \quad (26)$$

と表現し、アイコナール S に関して

$$\mathbf{B} \cdot \nabla S = 0, \quad (27)$$

$$\frac{dS}{dt} = 0 \quad (28)$$

という2つの条件を仮定する。1つ目の条件は、平衡プラズマ流がない場合にも使われたもので、磁力線方向に長波長という意味である。2つ目の条件がプラズマ流に関するところで、波の位相がプラズマ流に乗って変化していくことを意味している。これを用いると、波数ベクトル $\hat{\mathbf{k}}$ は

$$\hat{\mathbf{k}} = \nabla \zeta - q \nabla \theta - (\theta - \theta_k + \dot{\Omega} t) \nabla q \quad (29)$$

と表される。ここで $\Omega(r)$ はトロイダル回転の角周波数であり、 $\dot{\Omega} := d\Omega/dq$ である。つまり、小半径 r によって周波数 Ω が異なるシア回転になっている場合、波数ベクトルは時間に関して線形に変化する。これは、3節で紹介された、シア流によって引き伸ばされる”モード”と同じ考え方である。これを用いると、非圧縮条件の下、やはり $\hat{\xi}_{\perp}^{(0)}$ による慣性だけ残すモデル化をすると、次のようなモデル方程式が得られる [26]：

$$\rho |\hat{\mathbf{k}}|^2 \frac{\partial^2 \hat{\xi}_{\perp}^{(0)}}{\partial t^2} - 2\rho (\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \Omega) \frac{\partial \hat{\xi}_{\perp}^{(0)}}{\partial t} = B^2 \mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{|\hat{\mathbf{k}}|^2}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla \hat{\xi}_{\perp}^{(0)} \right) + \frac{2}{B^2} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\kappa}) (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla p) \hat{\xi}_{\perp}^{(0)}. \quad (30)$$

$\Omega \equiv 0$ として $\partial/\partial t$ を $-i\omega$ とすれば、(25) 式と一致する。プラズマ回転がない場合と同様、物理的に正しくない慣性を用いたモデル方程式なので、その解の時間発展は物理的なものとは異なる。しかし、正しく慣性を残した方程式、さらにはプラズマの圧縮性も残した方程式と全く同じ構造をしているため、それらの解と定性的には同様の振舞いをする。定性的な研究を行うには、便利なモデル方程式である。

(30) 式は、3節で紹介したように、右辺はエルミート作用素で記述され、左辺に移流項のようなものが付け加わった形をしている。

$$\bar{\rho} := \frac{\rho |\hat{\mathbf{k}}|^2 \sqrt{g}}{B^2 \psi'}, \quad (31)$$

$$U := 2\rho \frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \Omega}{|\hat{\mathbf{k}}|^2}, \quad (32)$$

$$\mathcal{L} \hat{\xi}_{\perp}^{(0)} := \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(f \frac{\partial \hat{\xi}_{\perp}^{(0)}}{\partial \vartheta} \right) - g \hat{\xi}_{\perp}^{(0)}, \quad (33)$$

$$f := \frac{|\hat{\mathbf{k}}|^2 \psi'}{B^2 \sqrt{g}}, \quad (34)$$

$$g := -\frac{2}{B^4} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\kappa}) (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla p) \quad (35)$$

を導入すると, (30) 式は次のように書ける:

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial^2 \hat{\xi}_{\perp}^{(0)}}{\partial t^2} - U \frac{\partial \hat{\xi}_{\perp}^{(0)}}{\partial t} \right) = \mathcal{L} \hat{\xi}_{\perp}^{(0)}. \quad (36)$$

ただし, ψ はポロイダル磁束関数でプライムは r 微分, \sqrt{g} は磁気座標 (r, ϑ, ζ) のヤコビアンである. 注意しなければならないのは, $\bar{\rho}$, U , \mathcal{L} は波数ベクトル $\hat{\mathbf{k}}$ を通じて時間依存していることである.

図1は, トロイダル回転を含むモデル方程式 (36) の数値解を示したものである. 同じ圧力勾配に対して, トロイダル回転シア $\dot{\Omega}_{TA}$ を 0, 0.118, 0.473 と変化させた. まず, 回転がない場合には不安定であり, 摂動のノルムが指数関数的に成長することがわかる. $\dot{\Omega}_{TA} \neq 0$ のときには, $\dot{\Omega}_{TA} = 0.118$ のグラフに特徴的に見られるように, $\dot{\Omega}_{TA} = 0$ のときとほぼ同じ成長率でノルムが増大するフェーズと, 代数的に減衰するフェーズが現れる. これは回転シアがバルーニングモードを安定化する効果をもつことを示している [27]. $\dot{\Omega}_{TA}$ がさらに大きくなると, 成長フェーズと減衰フェーズでのノルムの増減が釣り合い, 臨界安定状態となる. こ

れはプラズマ回転がない場合の臨界安定状態とは質的に異なる. 回転シアがある場合は, 臨界安定状態は時間平均の意味で実現されるのである. さらに $\dot{\Omega}_{TA}$ が大きくなると, 成長フェーズが減衰フェーズに埋もれる形で, ノルムは増大しなくなっている.

トロイダル回転シアによるバルーニングモード安定化は, ノルムの減衰によって説明されることがわかった. また, トカマクのポロイダル断面形状をD型にすることにより, 成長フェーズでの瞬間的成長率が低減され, かつ成長フェーズの時間的長さが減衰フェーズに対して相対的に減少することから, トロイダル回転によるバルーニングモード安定化が効率的に実現されることが明らかになっている [27]. では, どのようにしてこの減衰が起こるのかを調べたい [28, 29]. そこで, (36) 式右辺の演算子 \mathcal{L} が, t をパラメータとしてみると, $\vartheta \rightarrow \pm\infty$ で $\hat{\xi}_{\perp}^{(0)} \rightarrow 0$ という境界条件の下でエルミート作用素であることに着目する. したがって, 各瞬間において,

$$-\bar{\rho}(\vartheta; t) \omega^2(t) \xi(\vartheta; t) = \mathcal{L}(\vartheta, d/d\vartheta; t) \xi(\vartheta; t) \quad (37)$$

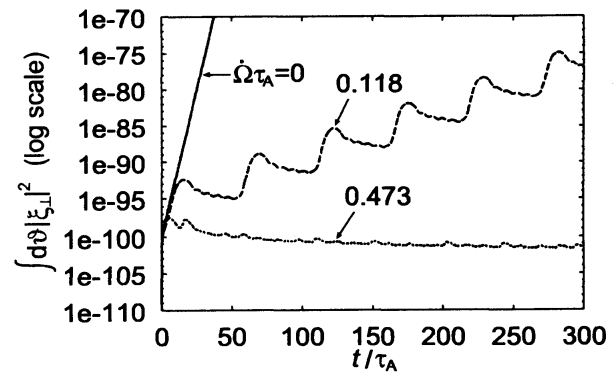


図1: トロイダル回転を含むバルーニング方程式 (36) の数値解. 同じ圧力勾配に対して, トロイダル回転シア $\dot{\Omega}_{TA}$ を 0, 0.118, 0.473 と変化させた.

という固有値問題を考えれば、 ω^2 は実数であり、固有関数は直交する。つまり、”各瞬間の固有モード”を使って、波動方程式 (36) の解 $\hat{\xi}_{\perp}^{(0)}(\vartheta, t)$ を展開すれば、Kelvin の方法のような”時間依存するモードによる分解”のイメージで現象を捉えることができるのではないかというわけである。これは、原理的には可能だが、例えば数値計算では実現不可能である。なぜなら、(37) 式では、 $\omega^2 \geq 0$ の領域に連続スペクトルが存在し、それに属する一般化固有関数は自乗可積分ではないからである。このような特異性をもつ関数を数値計算で扱うことは不可能である。

この困難は、次のようにすれば解決できる： (37) 式を使うのではなく、重み関数を $h(\vartheta)$ 導入した固有値問題

$$-w(\vartheta; t)\lambda(t)\xi(\vartheta; t) = \mathcal{L}(\vartheta, d/d\vartheta; t)\xi(\vartheta; t), \quad (38)$$

$$w(\vartheta; t) := \bar{\rho}(\vartheta; t)h(\vartheta) \quad (39)$$

を考え、 $h(\vartheta)$ を固有値 λ が $\lambda > 0$ においても離散的になるように選ぶ。 $\vartheta \rightarrow \pm\infty$ の漸近解析を行えば、 $|\vartheta| \gg 1$ のとき $h \propto |\vartheta|^{-4}$ と選べばよいことがわかる。 $|\vartheta| \sim 1$ 付近では、 $h = 1$ と選ぶ。このように h を選ぶとき、

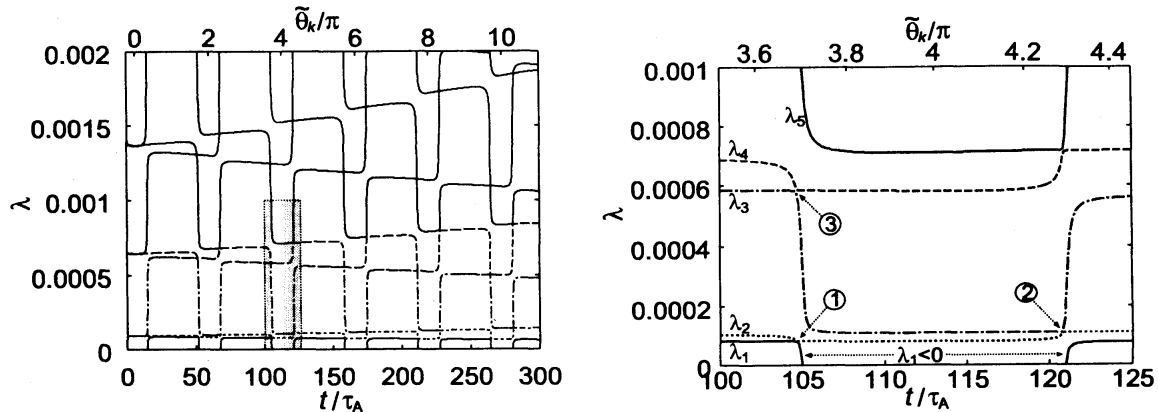
- 固有値問題 (38) から求められる臨界安定状態 $\lambda = 0$ は、元の固有値問題 (37) の ω^2 と一致する
- $|\vartheta| \sim 1$ 付近では、元の固有値問題 (37) を解いているのと変わらないので、その領域に局在するモードは、 h の導入によって影響を受けない

ことがわかる。(38) 式の t をパラメータとする固有値、固有関数を、 $\lambda_j(t), \xi_j(\vartheta, t)$ (ただし $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$) とすると、まず、 λ_j は図 2(a) に示すようになる。 $\lambda > 0$ でも、離散的な固有値が求められている。時間に関して周期をもっているように見えるのは、波数ベクトルが時間-空間について周期性をもっているからである。つまり、 t が $2\pi/\Omega$ 増えたとき、 ϑ も同時に 2π 増やしてやれば、同じ波数ベクトルになる。また、図 2(a) で網掛けされている部分を拡大したのが図 2(b) である。①, ②, ③で示されるような、固有値が交叉する時刻があることがわかる。 $105 \simeq t \simeq 122$ では、 $\lambda_1 < 0$ となっている。

次に、トロイダル回転を含むバレーニング方程式 (36) の数値解 $\hat{\xi}_{\perp}^{(0)}$ を

$$\hat{\xi}_{\perp}^{(0)} = \sum_j a_j(t) \xi_j(\vartheta, t), \quad (40)$$

$$a_j = \int_{-\infty}^{\infty} d\vartheta w \xi_j^* \hat{\xi}_{\perp}^{(0)} \quad (41)$$



(a) 固有値 λ を t の関数として示す. $0 \leq \lambda \leq 0.002$ のみプロットしている.

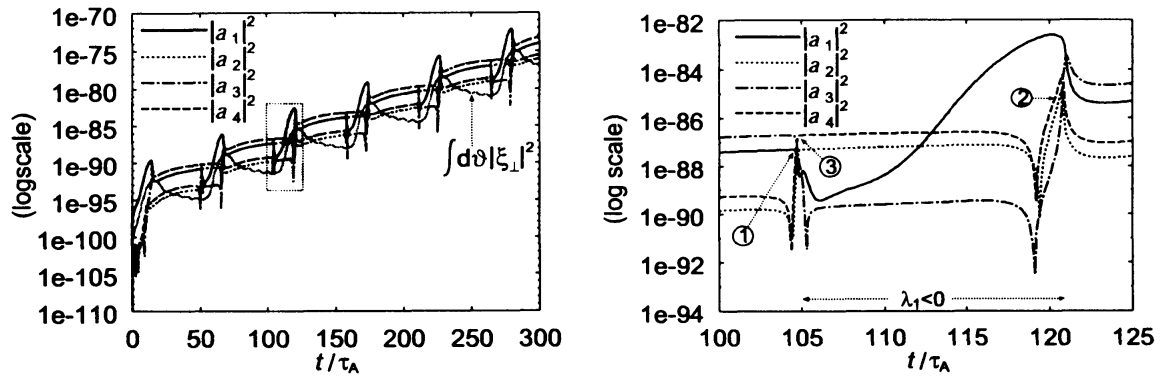
(b) (a) の網掛け領域の拡大図. $0 \leq \lambda \leq 0.001$ のみプロットしている.

図 2: (38) 式を t をパラメータとして解いて求められた固有値 λ_j を示す.

と”モード”展開した場合の、各モードのエネルギー $|a_j|^2$ をプロットしたのが図 3(a) である. 網掛けの部分拡大した図 3(b) で, ①で示される時刻では, 固有値 λ_1 に属するモードのエネルギー $|a_1|^2$ が $|a_2|^2$ に, ②では $|a_2|^2$ が $|a_3|^2$ に, ③では $|a_3|^2$ が $|a_4|^2$ に, それぞれ移っていくことがわかる. 不安定性によって, $\lambda_1 < 0$ の間 $|a_1|^2$ が増大するが, そのモードが平衡圧力勾配から吸い取ったエネルギーは, 固有値 λ_1 と λ_2 が交叉する時刻①において安定なモード a_2 に移送されている. その後も次々と安定な高次モードにエネルギーが移送されていくので, a_1 のエネルギーの増大が時間平均の意味で妨げられるのである. これが, 先ほど見た, エネルギーの減衰フェーズを生み出す, つまりシア回転がバルーニングモードを安定化するメカニズムである [28].

5. まとめ

磁場閉じ込め軸対称トーラスプラズマ (トカマク型) におけるバルーニング不安定性に対してシア流がもつ安定化効果について研究を行った. まず, シア流によって引き伸ばされる効果を考慮したモード展開である Kelvin の方法を紹介した. 次に, トカマクプラズマに同様の方法を適用し, 局所安定性解析を行った結果を紹介した. シア流効果である波数の時間変化によって, 波の振幅が指数関数的に増大する成長フェーズと, 代数的に減衰するフェーズが現れることが明らかになった. トーラス配位の周期性により, これら成長フェーズと減衰フェーズが交互に繰り返す. さらに, 各瞬間の波数ベクトルに対応する固有関数系を作り, 波を展開した. これにより, 不安定モードから安定モードへと波のエネ



(a) 各 "モード" エネルギーの時間発展.

(b) (a) の網掛け領域を拡大.

図 3: トロイダル回転を含むバレーニング方程式 (36) の数値解 $\hat{\xi}_{\perp}^{(0)}$ を (40), (41) 式にしたがって "モード" 展開したときの, 各モードのエネルギー $|a_j|^2$ の時間発展.

ルギーが移送されることが明らかになった. このエネルギー移送のため, 不安定モードは時間平均の意味でノルムが増大できなくなり, バレーニングモードが安定化される. このような方法論は, トカマクプラズマに限らず, 波を扱う一般的方法論として捉えることができる.

謝辞: 4節に示された研究は, 徳田伸二博士 (日本原子力研究所 (当時)), 吉田善章教授 (東大新領域) と共同で行われたものです. 筆者は科学研究費補助金 (特別研究員奨励費および若手研究 (B)) のサポートを受けました.

参考文献

- [1] J. P. Freidberg, *Ideal Magnetohydrodynamics* (Plenum Press, New York and London, 1987).
- [2] F. Troyon, R. Gruber, H. Saurenmann, S. Semenzato, S. Succi, *Plasma Phys. Control. Fusion* **26**, 209 (1984).
- [3] Y. Ishii, T. Ozeki, S. Tokuda *et al.*, *Plasma Phys. Control. Fusion* **40**, 1607 (1998).
- [4] H. Grad and H. Rubin, in *Proceedings of the Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy* (United Nations, Geneva, 1958), Vol. 31.
- [5] V. D. Shafranov, *Sov. Phys. -JETP* **26**, 682 (1960).
- [6] H. P. Zehrfeld, B. J. Green, *Nucl. Fusion* **12**, 569 (1972).

- [7] E. Hameiri, Phys. Fluids **26**, 230 (1983).
- [8] I. B. Bernstein, E. A. Frieman, M. D. Kruskal and R. M. Kulsrud, Proc. R. Soc. London, ser A **244**, 17 (1958).
- [9] R. Gruber, F. Troyon *et al.*, Comput. Phys. Comm. **21**, 323 (1981).
- [10] W. A. Newcomb, Ann. Phys. **10**, 232 (1960).
- [11] A. Pletzer, A. Bondeson and R. L. Dewar, J. Comput. Phys. **115**, 530 (1994).
- [12] S. Tokuda and T. Watanabe, Phys. Plasmas **6**, 3012 (1999).
- [13] E. Frieman and M. Rotenberg, Rev. Mod. Phys. **32**, 898 (1960).
- [14] Lord Kelvin (W. Thomson), Philos. Mag., Ser. 5 **24**, 188 (1887).
- [15] T. Tatsuno, F. Volponi, and Z. Yoshida, Phys. Plasmas **8**, 399 (2001).
- [16] F. Volponi, Z. Yoshida and T. Tatsuno, Phys. Plasmas **7**, 2314 (2000).
- [17] J. W. Connor, R. J. Hastie and J. B. Taylor, Phys. Rev. Lett. **40**, 396 (1978).
- [18] J. W. Connor, R. J. Hastie and J. B. Taylor, Proc. R. Soc. London Ser. A **365**, 1 (1979).
- [19] R. L. Dewar and A. H. Glasser, Phys. Fluids **26**, 3038 (1983).
- [20] R. L. Dewar, J. Manickam, R. C. Grimm, M. S. Chance, Nucl. Fusion **21**, 493 (1981).
- [21] W. A. Cooper, Plasma Phys. Control. Fusion **30**, 1805 (1988).
- [22] E. Hameiri and S. -T. Chun, Phys. Rev. A **41**, 1186 (1990).
- [23] F. L. Waelbroeck and L. Chen, Phys. Fluids B **3**, 601 (1991).
- [24] R. L. Miller and F. L. Waelbroeck *et al.*, Phys. Plasmas **2**, 3676 (1995).
- [25] M. Furukawa, Yuji Nakamura *et al.*, Phys. Plasmas **8**, 4889 (2001).
- [26] M. Furukawa and S. Tokuda, J. Plasma and Fusion Res. SERIES **6**, 210 (2004).
- [27] M. Furukawa, S. Tokuda and M. Wakatani, Nucl. Fusion **43**, 425 (2003).
- [28] M. Furukawa and S. Tokuda, Phys. Rev. Lett. **94**, 175001 (2005).
- [29] M. Furukawa, Z. Yoshida and S. Tokuda, Phys. Plasmas **12**, 072517 (2005).